数理解析研究所講究録
61巻 1968年 96-122

群上の閉集合と群代数

都大理　　佐伯貞浩

§1. 代数 $A(\hat{G})$

G を任意の局所コンパクト・アーベル群, dx をその Haar 測度とする. dx に関する L^1 空間 $L^1(G)$ にノルムを

$$(1.1)\qquad \|f\|_1 = \int_G |f(x)|\,dx \qquad (f \in L^1(G))$$

で定義し, 積を convolution

$$(1.2)\qquad (f*g)(x) = \int_G f(x-y)\,g(y)\,dy \qquad (x \in G;\ f, g \in L^1(G))$$

で定義すれば, $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ が成立して, $L^1(G)$ は可換, 準単純, 正則なバナッハ代数となる.

さて $\hat{G}$ を G の指標群とするとき, $f \in L^1(G)$ の Fourier 変換は,

$$(1.3)\qquad \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x, \gamma)\,dx \qquad (\gamma \in \hat{G})$$

で定義される. $\gamma \in \hat{G}$ を固定するとき, 対応 $f \longrightarrow \hat{f}(\gamma)$

は自明でない $L^1(G)$ の複素準同型写像を定め，又すべての自明でない $L^1(G)$ の複素準同型写像はこの形に表わせられる．実際，$\hat{G}$ は $L^1(G)$ のスペクトラムと同一視できる．

$L^1(G)$ の準単純性，即ち Fourier 変換の一意性によって，$L^1(G)$ を $C(\hat{G})$ の部分代数として考える事が可能である．そこで

(1.4) $\qquad A(\hat{G}) = \{\hat{f} : f \in L^1(G)\}$

とおき，これにノルムを $\|\hat{f}\| = \|f\|_1$ で定義する．従って，$A(\hat{G})$ は1つのバナッハ代数であって，$A(\hat{G}) \subset C(\hat{G})$ は norm-decreasing embedding である．

今後，これらの記号を断りなく使用する．又，G がコンパクトであるときは，常に $\int_G dx = 1$ とし，G が無限デスクリートであるときは，1点の Haar 測度は常に1であるとする。

例1．Z を，整数全体が加法に関して作るデスクリートな群とする．このとき，$f \in L^1(G)$ は絶対収束する数列

$$f = \{f(n)\}_{-\infty}^{\infty}, \quad \|f\|_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$$

であり，f，$g \in L^1(Z)$ の積は

$$(f*g)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m)g(m)$$

で定義される数列 $f*g=\{(f*g)(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ である．又 Z の指標群はトーラス T （circle group）で，$f\in L^1(Z)$ の Fourier 変換は

$$\hat{f}(z)=\sum_{n\in Z} f(n)\,z^n \qquad (z\in T)$$

で定義される単位円周上の連続函数である．よって $A(T)$ は，絶対収束する Fourier 級数を持つ連続な函数全体からなるバナッハ代数である．

例2．R^n を，普通の加法と位相とを持った n 次元ユークリッド空間とすれば，R^n の指標群は R^n 自身であって，$f\in L^1(R^n)$ の Fourier 変換は

$$\hat{f}(x)=\int_{R^n} f(y)\,e^{-ix\cdot y}\,dy \qquad (x\in R^n),$$

そして，$C_c^\infty(R^n)\subset A(R^n)$ である．

定理1.1．(a) $\hat{G}$ の指標群は G であり，$\hat{G}$ がコンパクトであるための必要十分条件は，G がデスクリートな事である．

(b) $\hat{G}$ が距離付け可能であるための必要十分条件は，G が σ－コンパクトな事である．

(c) $\hat{G}$ がデスクリートでないならば，$\hat{G}$ は距離付け可能な

無限コンパクト群，又はRをその閉部分群として含む．

定理1.2．$\hat{G}$の任意の閉部分群Λに対して，$A(\Lambda)=A(\hat{G})|\Lambda$，即ち，$f\in A(\Lambda)$は，ある$F\in A(\hat{G})$の$\Lambda$への制限と一致する．

定理1.3．$f\in A(\hat{G})$，$\gamma_0\in\hat{G}$，$f(\gamma_0)=0$とすれば，任意の$\varepsilon>0$に対して，$h\in A(\hat{G})$で

(i)　$\|f-fh\|<\varepsilon$，　(ii)　γ_0のある近傍で$h=0$，

(iii)　$0\leq h\leq 1$

を満たすものが存在する．

§2．$A(\hat{G})$の閉イデアル．

よく知られている様に，$L^1(G)$の閉部分空間がイデアルであるための必要十分条件は，それが平行移動で不変な事である．$L^1(G)$の閉イデアルI [又は$A(\hat{G})$の閉イデアルI']に対して

$$Z(I)=\bigcap_{f\in I}\{\gamma\in\hat{G}:\hat{f}(\gamma)=0\}$$

$$\left[\text{又は}\ Z(I')=\bigcap_{f\in I'}\{\gamma\in\hat{G}:f(\gamma)=0\}\right]$$

とおく．明らかに，$Z(I)$ [又は$Z(I')$]は$\hat{G}$の閉集合である．

さてEを$\hat{G}$の任意の閉集合とする．このとき，$E = Z(I)$となる$A(\hat{G})$の閉イデアルが唯一つしか存在しないならば，EはS-集合であるという．次に

$$I(E) = \{ f \in A(\hat{G}) : \hat{f}(\gamma) = 0, \ \forall \gamma \in E \}$$

$$I_0(E) = \{ f \in A(\hat{G}) : \text{Eのある近傍で } f = 0 \}$$

とおけば，$I(E)$及び$J(E) = \overline{I_0(E)}$は各々，$Z(I) = E$を満たす最大及び最小の閉イデアルである．従って，EがS-集合である事と，$I(E) = J(E)$である事とは同値である．一般の，可換・準単純・正則なバナッハ代数についても，同じ事がいえる．もしEが開かつ閉ならば，$I(E) = J(E)$であるから，EはS-集合である．特に$\hat{G}$がデスクリートならば，$\hat{G}$のすべての(閉)集合はS-集合である．

非S-集合の最初の例は，L. Schwartz [11]により与えられた．

定理 2.1．R^3の単位球面$E = \{ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) : \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \}$は$A(R^3)$に対する非$S$-集合である．

証明．$C_c^\infty(R^3) \subset A(R^3)$に注意して(例2)，

$$I_1 = \{ f \in L^1(R^3) : \hat{f} \in C_c^\infty, \ \text{E上で } \hat{f} = 0 \}$$

$$J_1 = \{ f \in I_1 : \text{E上で } (\partial/\partial\gamma_1)\hat{f} = 0 \}$$

とおく．I_1, J_1ともに平行移動によって不変だから，それらのL^1-閉包は$L^1(R^3)$の閉イデアルである．又容易にわかる様に，

$Z(\bar{I}_1) = Z(\bar{J}_1) = E$.

$\bar{I}_1 \neq \bar{J}_1$ を示すために，μ を E の面積測度（但し $\mu(E)=1$）とする．このとき，

$$\hat{\mu}(x) = \int_E e^{i x\cdot\gamma}\, d\mu(\gamma) = \frac{\sin\|x\|}{\|x\|}$$

だから，すべての $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ に対して，$|x_1\hat{\mu}(x)| \leq 1$．よって

$$\Phi(f) = \int_{R^3} f(x)\, x_1\, \hat{\mu}(-x)\, dx \qquad (f \in L^1(R^3))$$

は $L^1(R^3)$ 上の有界汎函数である．ところで，$\hat{f} \in C_c^\infty(R^3)$ なら

$$\begin{aligned}
\Phi(f) &= \int_{R^3} x_1 f(x) \left\{ \int_E e^{-i x\cdot\gamma}\, d\mu(\gamma) \right\} dx \\
&= \int_E \left\{ \int_{R^3} x_1 f(x)\, e^{-i x\cdot\gamma}\, dx \right\} d\mu(\gamma) \\
&= \int_E \left\{ i \frac{\partial}{\partial\gamma_1} \int_{R^3} f(x)\, e^{-i x\cdot\gamma}\, dx \right\} d\mu(\gamma) \\
&= i \int_E \left(\frac{\partial}{\partial\gamma_1} \hat{f}\right)(\gamma)\, d\mu(\gamma).
\end{aligned}$$

よって $f \in J_1$ なら $\Phi(f) = 0$．しかし $\Phi(f) \neq 0$ となる $f \in I_1$ が存在する．従って，$\bar{J}_1 \neq \bar{I}_1$ となり，E は非 S-集合である．(Q.E.D.)．又，上の証明から直ぐわかる様に，

系. T^3 は $A(T^3)$ に対する非S-集合を含む.

この Schwartz の結果(1948)の後, Helson は次の定理を与えた(1952).

定理 2.2([1],[9]). もし $A(\hat{G})$ が

$$I \subsetneqq J \quad かつ \quad Z(I) = Z(J) = E$$

となる2つの閉イデアル I と J を含むならば, $I \subsetneqq K \subsetneqq J$ を満たす閉イデアル $K \subset A(\hat{G})$ が存在する.

又, Herz([2], [3])は, Cantor の3進集合 $\subset [0,1]$ 及び R^2 の単位円周がS-集合である事を示した(1956, 58). 非S-集合の存在に関する最終的な結果は, Malliavin により与えられた(1959).

Malliavin の定理([5],[6],[7]). すべてのデスクリートでない $\hat{G}$ は $A(\hat{G})$ に対する非S-集合を含む.

彼の最初の証明は非常に難解であったが, Kahane [4] が確率を用いて比較的容易な証明を与えた. その後, Varopoulos([13],[14],[15])は tensor 代数を用いて全く別の証明を与えた. こゝでは彼の証明を述べる.

§3. テンソル代数

この章では，可換・準単純・正則なバナッハ代数を，単にB-代数とよぶことにする．

B_1, B_2 を2つのB-代数，$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ をそれらのスペクトラム，$B_1 \hat{\otimes} B_2$ を π-ノルムに関するテンソル積（1つのバナッハ代数）とする．容易にわかる様に，$B_1 \hat{\otimes} B_2$ のスペクトラムは $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ である．いま各 $\mathfrak{M}_i$ から閉集合 E_i を取り，

$$I_i = I(E_i) \subset B_i$$

$$q_i : B_i \longrightarrow B_i/I_i \quad \text{（自然な写像）}$$

$$q = q_1 \otimes q_2 : B_1 \hat{\otimes} B_2 \longrightarrow B_1/I_1 \hat{\otimes} B_2/I_2$$

とする．

定理 3.1. (a) $\mathcal{K} \equiv I_1 \otimes B_2 + B_1 \otimes I_2 = (B_1 \otimes B_2) \cap \ker q$.

(b) $\mathcal{K}$ は $\ker q$ で dense である．

(c) $B_1 \hat{\otimes} B_2 / \ker q \equiv B_1/I_1 \hat{\otimes} B_2/I_2$ （等長的）．

(d) もし $B_1/I_1 \hat{\otimes} B_2/I_2$ が準単純ならば，$\ker q = I(E_1 \times E_2)$.

証明．(a)．明らかに $\mathcal{K} \subset (B_1 \otimes B_2) \cap \ker q$ であるから逆を示せば良い．そのために $x \in (B_1 \otimes B_2) \cap \ker q$：

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_1^{(i)} \otimes x_2^{(i)} \qquad (x_1^{(i)} \in B_1,\ x_2^{(i)} \in B_2)$$

を任意に固定する．$\{x_j^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ から mod I_j で1次独立な元の

極大集合 $\{e_j^{(k)}\}_k$ を取り出すと，x は

$$x = \sum_j \sum_k \lambda(j,k)\, e_1^{(j)} \otimes e_2^{(k)} \qquad (\mathrm{mod}\ \mathcal{K})$$

の形に表わせる．$x \in \ker q$ より

$$0 = q(x) = \sum_j \sum_k \lambda(j,k)\, q_1(e_1^{(j)}) \otimes q_2(e_2^{(k)})$$

となるが，$\{q_1(e_1^{(j)}) \otimes q_2(e_2^{(k)})\}_{j,k}$ は $B_1/I_1 \otimes B_2/I_2$ の1次独立な元だから，すべての (j,k) に対して $\lambda(j,k) = 0$ である．従って $x \in \mathcal{K}$ を得る．

(b) 及び (c)：$x \in B_1 \otimes B_2$ を固定する．$\|q\| \leq 1$ より $\|q(x)\|_\pi \leq \|x + \mathcal{K}\|_\alpha$ は明らか．逆の不等式を示すために $\varepsilon > 0$ を固定すると，π-ノルムの定義から，

$$q(x) = {}^{\exists}\sum_{i=1}^{n} q_1(x_1^{(i)}) \otimes q_2(x_2^{(i)}) \qquad (x_j^{(i)} \in B_j)$$

$$: \|q(x)\|_\pi + \varepsilon/2 > \sum_i \|q_1(x_1^{(i)}) \otimes q_2(x_2^{(i)})\|$$

又商ノルムの定義より $y_j^{(i)} \in x_j^{(i)} + I_j$ が存在して

$$\sum_i \|q_1(x_1^{(i)})\| \cdot \|q_2(x_2^{(i)})\| > \sum_i \|y_1^{(i)}\| \cdot \|y_2^{(i)}\| - \varepsilon/2.$$

よって $y = \sum y_1^{(i)} \otimes y_2^{(i)}$ とすると，$q(x) = q(y)$ だから $y \in x + \mathcal{K}$ であり

$$\|q(x)\|_\pi + \varepsilon > \sum_i \|y_1^{(i)}\| \cdot \|y_2^{(i)}\| \geq \|y\|_\pi \geq \|x + \mathcal{K}\|_\alpha.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから，前の不等式と合わせて

$$\| q(x) \|_\pi = \| x + \mathcal{K} \|_\alpha = \| x + \overline{\mathcal{K}} \|_\alpha \quad (x \in B_1 \otimes B_2)$$

を得る．この事からたゞちに (b) 及び (c) を得る．

(d)： (a) 及び (b) から明らかに $Z(\ker q) = E_1 \times E_2$ である．一方仮定より，$B_1/I_1 \hat{\otimes} B_2/I_2$ は準単純であるから，(c) によって $(B_1 \hat{\otimes} B_2) / \ker q$ も準単純でないといけない．従って，$\ker q = I(E_1 \times E_2)$ である．

一般に，K を任意のコンパクト・Hausdorff 空間とするとき，$\mathbb{C}(K) \hat{\otimes} \mathbb{C}(K)$ を $V(K)$ で表わす事にする．従って，$V(K)$ のスペクトラムは $K \times K$ であり，バナッハ代数 $V(K)$ は可換・準単純・正則である（Tomiyama [12]）．

定理 3.2. $\hat{G}$ を任意のコンパクト群とする．このときもし $\hat{G}$ が $A(\hat{G})$ に対する非 S-集合を含めば，$\hat{G} \times \hat{G}$ はテンソル代数 $V(\hat{G}) = \mathbb{C}(\hat{G}) \hat{\otimes} \mathbb{C}(\hat{G})$ に対する非 S-集合を含む．

証明. まず写像 $M : A(\hat{G}) \longrightarrow V(\hat{G})$ を

$$(Mf)(\alpha, \beta) = f(\alpha + \beta) \qquad (f \in A(\hat{G})\,;\ \alpha, \beta \in \hat{G})$$

で定義すると，$\|M\| \leq 1$．次に写像 $P : V(\hat{G}) \longrightarrow A(\hat{G})$ を

$$(Pf)(\alpha) = \int_{\hat{G}} f(\alpha - \beta, \beta)\, d\beta \qquad (f \in V(\hat{G})\,;\ \alpha \in \hat{G})$$

で定義する．もし，

$$f \in V(\hat{G}) : f(\alpha,\beta) = \sum_1^\infty g_i(\alpha) h_i(\beta), \quad \sum_1^\infty \|g_i\|_\infty \cdot \|h_i\| < \infty$$

とすれば，

$$(Pf)(\alpha) = \sum_1^\infty \int_{\hat{G}} g_i(\alpha-\beta) h_i(\beta)\, d\beta = \sum_1^\infty (g_i * h_i)(\alpha)$$

となるから，

$$\|Pf\|_{A(\hat{G})} \leqq \sum_1^\infty \|g_i * h_i\|_{A(\hat{G})} = \sum_1^\infty \|\hat{g}_i \hat{h}_i\|_{L^1(G)}$$

$$\leqq \sum_1^\infty \|\hat{g}_i\|_2 \cdot \|\hat{h}_i\|_2 = \sum_1^\infty \|g\|_2 \cdot \|h\|_2 \leqq \sum_1^\infty \|g_i\|_\infty \cdot \|h_i\|_\infty .$$

従って，$\|P\| \leqq 1$ である．更に任意の $f \in A(\hat{G})$ に対して，

$$((P \circ M) f)(\alpha) = \int_{\hat{G}} (Mf)(\alpha-\beta, \beta)\, d\beta = \int_{\hat{G}} f(\alpha)\, d\beta = f(\alpha).$$

即ち　$P \circ M : A(\hat{G}) \underset{\geqq}{\xrightarrow{M}} V(\hat{G}) \underset{\geqq}{\xrightarrow{P}} A(\hat{G})$

において，$P \circ M$ は恒等写像，従って特に M は等長写像である．

さて，$A(\hat{G})$ に対する非 S-集合 $E_1 \subset \hat{G}$，及び $f \in I(E_1)$ で $f \notin J(E_1)$ となるものを取る．そして

$$E_2 = \{ (\alpha,\beta) : \alpha+\beta \in E \} \subset \hat{G} \times \hat{G}$$

が $V(\hat{G})$ に対する非 S-集合である事を示そう．まず M の

定義から Mf は E_2 上で 0 であるから, $Mf \in I(E_2)$ である. 又容易に分かる様に

$$g \in I_0(E_2) \Longrightarrow Pg \in I_0(E_1)$$

であるから,

$$\inf_{g \in I_0(E_2)} \| Mf - g \|_V \geqq \inf_{g \in I_0(E_2)} \| P(Mf - g) \|_V$$

$$= \inf_{g \in I_0(E_2)} \| f - Pg \|_A \geqq \inf_{h \in I_0(E_1)} \| f - h \|_A > 0.$$

従って, $Mf \notin J(E_2) = \overline{I_0(E_2)}$. 即ち E_2 は $V(\hat{G})$ に対する非 S-集合である (Q.E.D.).

補助定理 3.3. $\hat{G}_1$, $\hat{G}_2$ を 2 つのコンパクト・アーベル群とし, $V'(\hat{G}_1, \hat{G}_2) = L^\infty(\hat{G}_1) \hat{\otimes} L^\infty(\hat{G}_2)$ とおく. このとき $V'(\hat{G}_1, \hat{G}_2)$ は代数的に $L^\infty(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2)$ の部分代数とみなせる. 即ち, 写像 $J : V'(\hat{G}_1, \hat{G}_2) \longrightarrow L^\infty(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2)$ を

$$f = \sum_i g_i \otimes h_i : \sum_i \| g_i \|_\infty \| h_i \|_\infty < \infty$$

$$\xrightarrow{J} (Jf)(\alpha, \beta) = \sum_i g_i(\alpha) h_i(\beta) \in L^\infty(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2)$$

で定義するとき, J は $(1:1)$ である.

証明. Tomiyama の定理から, $f \neq 0$ に対して,

$$\langle f, F_1 \otimes F_2 \rangle = \sum_i \langle g_i, F_1 \rangle \langle h_i, F_2 \rangle \neq 0$$

を満たす $L^\infty(\hat{G}_j)$ 上の有界線形汎函数 $F_j \in [L^\infty(\hat{G}_j)]'$ が存在する. 一方, L^1 の単位球は, $[L^\infty]'$ の単位球で ($[L^\infty]'$ の汎弱位相に関して) dense であるから,

$$\langle f, f_1 \otimes f_2 \rangle = \sum_i \langle g_i, f_1 \rangle \langle h_i, f_2 \rangle \neq 0$$

を満たす $f_j \in L^1(\hat{G}_j)$ が存在する. このとき $f_1 \cdot f_2 \in L^1(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2)$ であって,

$$\int_{\hat{G}_1 \times \hat{G}_2} (Jf) f_1 \cdot f_2 \, d\gamma = \sum_i \int_{\hat{G}_1 \times \hat{G}_2} (g_i \cdot h_i)(f_1 \cdot f_2) \, d\gamma = \langle f, f_1 \otimes f_2 \rangle \neq 0.$$

よって $Jf \neq 0$ である (Q.E.D.).

次に D_∞ を2進群, 即ち2個の元 $\{0,1\}$ からなる群 $Z(2)$ の可附番直積群

$$D_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} Z_n(2) \ ; \ Z_n(2) = Z(2)$$

とする. このとき, 距離付け可能・完全不連結・コンパクトな完全集合は D_∞ と同位相である. 又, 明らかに, 任意の $\omega = 1, 2, 3, \cdots, \aleph_0$ に対して, $D_\infty{}^\omega$ と D_∞ とは, 同位相である.

補助定理 3.4. $D_\infty \times D_\infty$ は $V(D_\infty) = C(D_\infty) \hat{\otimes} C(D_\infty)$ に対する非 S-集合を含む.

証明. 最初に写像 $p: D_\infty \longrightarrow T^3$ を

$$x = \{x_n\}_0^\infty \in D_\infty \xrightarrow{\ p\ } p(x) = (p_0(x), p_1(x), p_2(x)) \in T^3$$

$$: p_j(x) = \exp\left[2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{3n+j}}{2^{n+1}}\right] \qquad (j = 0, 1, 2)$$

で定義すれば, これは D_∞ から T の上への連続な写像である. 容易に分かる様に, T^3 から D_∞ への Borel 写像で

$$\forall t \in T^3 \ : \ p(q(t)) = t$$

を満たすものが存在する.

次に, 2つの写像

$$V(T^3) \xrightarrow{\ P\ } V(D_\infty) \xrightarrow{\ Q\ } V'(T^3) = L^\infty(T^3) \hat{\otimes} L^\infty(T^3)$$

を次の様に定義する:

$$(Pf)(x, y) = f(p(x), p(y)) \qquad (f \in V(T^3);\ x, y \in D_\infty)$$

$$(Qf)(s, t) = f(q(s), q(t)) \qquad (f \in V(D_\infty):\ s, t \in T^3)$$

もち論, $V'(T^3) \subset L^\infty(T^3 \times T^3)$ とみなしての事である; これは前の補助定理から可能である. このとき, 明らかに

$\|P\| \leqslant 1$, $\|Q\| \leqslant 1$ であり，又 $f \in V(T^3)$ なら $Q \circ Pf = f$ が成立する．

さて，p-7 の系と定理 3.2 から，$T^3 \times T^3$ は $V(T^3)$ に対する非 S-集合 E を含む．いま，写像

$$p^2 = p \times p : D_\infty \times D_\infty \longrightarrow T^3 \times T^3$$

に関する E の逆像を $\widehat{E} = (p^2)^{-1}(E)$ として，$\widehat{E}$ が $V(D_\infty)$ に対する非 S-集合である事を示そう．そのためには，$J(E) \subsetneq I(E) \subset V(T^3)$ であるから，

$$P^{-1}[J(\hat{E})] = J(E) \text{ かつ } P^{-1}[I(\hat{E})] = I(E)$$

を示せばよい．まず p^2 が "上へ" の写像である事に注意すると，任意の集合 $S \subset T^3 \times T^3$ 及び $f \in V(T^3)$ に対して

$$S \text{ 上で } f = 0 \iff \widehat{S} = (p^2)^{-1}(S) \text{ 上で } Pf = 0$$

であるから，$P^{-1}[I(\hat{E})] = I(E)$ 及び $P^{-1}[J(\hat{E})] \supset J(E)$ を得る．従って，$P^{-1}[J(\hat{E})] \subset J(E)$ を示せば証明は終わる．

そこで，$0 \in T^3$ の各閉近傍 U に対して，

$$\chi_U \in C(T^3)\,;\ \chi_U \geqslant 0,\ \operatorname{supp} \chi_U \subset U,\ \int_{T^3} \chi_U \, dt = 1$$

を取り，写像 $\omega_U : V'(T^3) \longrightarrow V(T^3)$ を

$$(\omega_U F)(s,t) = \int_{T^3}\int_{T^3} F(s-s', t-t')\,\chi_U(s')\,\chi_U(t')\,ds'\,dt'$$

で定義すると，明らかに $\|\omega_U\| \leqq 1$ である.

さて $f \in P^{-1}[J(\hat{E})]$ に対して，$\varepsilon > 0$ を任意に固定する.
$Pf \in J(\hat{E})$ であるから，$g \in I_0(\hat{E})$ が存在して，

$$\|Pf - g\|_{V(D_\infty)} < \varepsilon .$$

このとき $\emptyset = (\mathrm{supp}\, g) \cap \hat{E} = (\mathrm{supp}\, g) \cap [(p^2)^{-1} E]$ であるから，
$p^2(\mathrm{supp}\, g) \cap E = \emptyset$ となる. 従って $0 \in T^3$ の開近傍 U_1 を適当に取ると，

$$[\,p^2(\mathrm{supp}\, g) + U_1 \times U_1] \cap E = \emptyset$$

となる. 一方 $(Q \circ P)f = f$ に注意すれば，ある $0 \in T^3$ の開近傍 U_2 が存在して，

$$U \subset U_2 \implies \|f - \omega_U[(Q\circ P)f]\|_{V(T^3)} < \varepsilon$$

が成立する. よって $U = U_1 \cap U_2$ とおけば，

$$\omega_U[Qg] \in I_0(E) \quad \because \quad \mathrm{supp}\,\omega_U[Qg] \subset p^2(\mathrm{supp}\, g) + U \times U$$

であって，

$$\|f - \omega_U[Qg]\|_{V(T^3)} \leqq \|f - \omega_U[(Q\circ P)f]\| + \|\omega_U \circ Q[Pf - g]\|$$

$\|\omega_v \circ Q\| \leq \|\omega_v\|\|Q\| < 1$ であるから，この不等式の右辺は 2ε でおさえられる．$\varepsilon > 0$ は任意だから，これは f が $I_0(E)$ の元で任意に近似される事を意味する．よって $f \in J(E)$ (Q.E.D.)．

§4．テンソル代数と群代数

E を $\hat{G}$ の任意のコンパクト・完全不連結な集合とする．$|f|=1$ となる任意の $f \in \mathbf{C}(E)$ 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\sup_{\gamma \in E} |f(\gamma) - (x, \gamma)| < \varepsilon \tag{4.1}$$

となる $x \in G$ が存在するとき，E を Kronecker 集合（又は K_∞-集合）という．又，ある正整数 $m \geq 2$ が存在して，$\{f(\gamma)\}^m = 1$ となる任意の $f \in \mathbf{C}(E)$ 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対して，(4.1) を満たす $x \in G$ が存在するとき，E を K_m-集合という．以下 m は 2 以上の整数又は記号 ∞ を表わすものとする．

いま，$\hat{G}$ を距離付け可能・P を $\hat{G}$ の完全部分集合とすれば，$\gamma_0 \in \hat{G}$ が存在して，$P + \gamma_0$ はある K_m-集合を含む（[8]，[15]）．［証明は多少めんどうであるが，それ程難かしくはない．］従って特に，デスクリートでない $\hat{G}$ は，定理 1.1 によって，ある K_m-集合を含む．

K_m 集合はいくつかの興味ある性質を持つ. たとえば, それは独立であり, 従って, それにより生成される部分群は($\hat{G}$ がデスクリートでない限り) Haar測度が0である. 更にすべての K_m-集合は S-集合である([13],[10]). こゝで必要とするのは:

定理 4.1. E を $\hat{G}$ の K_m-集合とする. このとき任意の $f \in C(E)$ に対して,

$$F \in A(\hat{G}) : \|F\|_A \leq 3\|f\|_\infty \quad , \quad F|E = f$$

を満たす F が存在する.

次に E を $\hat{G}$ の任意のコンパクト集合とする. このとき, 商代数 $A(\hat{G})/I(E)$ のスペクトラムは E であり, $A(\hat{G})/I(E)$ は E 上の函数代数 $A(E)$ として表現される:

$$A(\hat{G})/I(E) = A(E) \equiv \{\hat{f}|E : \hat{f} \in A(\hat{G})\}.$$

よって今後常に $A(E)$ には $A(\hat{G})/I(E)$ の商ノルムを入れて考える事にする. 従って, 定理 4.1 は, すべての K_m-集合 E に対して,

$A(E) \cong C(E)$ (代数的に同型; ノルム同値)

である事を示している.

定理 4.2. $\hat{G}$をコンパクト，E_1とE_2 とをその互に交わらない閉部分集合として，

$$E^* = E_1 \cup E_2 \ , \ \hat{E} = E_1 + E_2 \subset \hat{G}$$

とおく．このとき，もし E^* が K_m- 集合であれば，

$$A(\hat{E}) \equiv A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2) \cong \mathbf{C}(E_1) \hat{\otimes} \mathbf{C}(E_2).$$

最初に次の事を証明する．

補助定理．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次の性質を持つ定数 $\eta(\varepsilon) > 0$ が存在する：$\hat{G}$をコンパクト，E をその任意の閉部分集合とする．しからば，

$$\sup\{|(x,\gamma)-(y,\gamma)| : \gamma \in E\} < \eta(\varepsilon)$$

を満たす任意の $x, y \in G$ に対して

$$\| x|E - y|E \|_{A(E)} < \varepsilon.$$

証明．T 上の函数 $g(t) = 1 - t \ (|t| = 1)$ を考えると，$g \in A(T)$ かつ $g(1) = 0$．よって，p-4 の定理 1.3 より $k \in A(T)$ で

$$\| g - gk \| < \varepsilon \text{，かつ 1 の近傍で } k = 0$$

を満たすものが存在する．そこで $f = g - gk$ とおくと，ある $\eta(\varepsilon) > 0$ が存在して，

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n \quad ; \quad \|f\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

かつ

$$t \in T,\ |1-t| < \eta(\varepsilon) \Longrightarrow f(t) = 1-t$$

となる．いま $x,\ y \in G$ が上記の仮定を満たすとして

$$F(\gamma) = (x,\gamma)\, f((y-x,\gamma)) \qquad (\gamma \in \hat{G})$$

とおけば，$\|F\|_A \leqq \sum |a_n| < \varepsilon$ であり，しかも

$$|1-(y-x,\gamma)| < \eta(\varepsilon) \Longrightarrow F(\gamma) = (x,\gamma) - (y,\gamma).$$

よって，$\| x|E - y|E\|_{A(E)} = \|F|E\|_{A(E)} \leqq \|F\|_{A(G)} < \varepsilon$ (Q.E.D.).

定理4.2の証明．仮定より $E_1 \cup E_2$ は K_m-集合であるから E_1と E_2 も K_m-集合である．よって前に注意した事から，$A(E_j) \cong \mathbb{C}(E_j)$ となり，

$$A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2) \cong \mathbb{C}(E_1) \hat{\otimes} \mathbb{C}(E_2)$$

を得る．従って，特に $A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2)$ は準単純である．一方よく知られている様に，$A(\hat{G} \times \hat{G}) = A(\hat{G}) \hat{\otimes} A(\hat{G})$ であるから，p-8の定理3.1を適用して

$$\mathcal{A}(E_1\times E_2) \equiv \mathcal{A}(\hat{G})\hat{\otimes}\mathcal{A}(\hat{G})/I(E_1\times E_2) \equiv \mathcal{A}(E_1)\hat{\otimes}\mathcal{A}(E_2).$$

次に，写像

$$\mathcal{A}(G) \xrightarrow{\ \lambda\ } \mathcal{A}(E_1\times E_2):\quad \lambda f(e_1,e_2) = f(e_1+e_2)$$

を考えると，明らかに $\|\lambda\| \leqq 1$ であって λ は準同型である。しかも $\ker\lambda = I(E_1+E_2) = I(\widehat{E})$ であるから，写像

$$\mathcal{A}(\hat{E}) \xrightarrow{\ \dot{\lambda}\ } \mathcal{A}(E_1\times E_2):\quad \lambda g(e_1,e_2) = g(e_1+e_2)$$

は，$\|\dot{\lambda}\| \leqq 1$ を満たす1対1の準同型写像である。

従って $\dot{\lambda}$ が等長写像である事を示せば証明は終わる。このために，$f\in\mathcal{A}(E_1\times E_2)$: $\|f\| < 1$ 及び $\varepsilon > 0$ を任意に固定する。$\mathcal{A}(E_1\times E_2) = \mathcal{A}(\hat{G}\times\hat{G})/I(E_1\times E_2)$ だから，

$$F\in\mathcal{A}(\hat{G}\times\hat{G}):\quad F = \sum_{\varphi\in G^2}\alpha_\varphi\,\varphi$$

$$\|F\|_{\mathcal{A}(\hat{G})} = \sum_{\varphi}|\alpha_\varphi| < 1$$

で $F|E_1\times E_2 = f$ となるものが存在する。仮定より $E_1\cup E_2$ は K_m-集合だから，任意の $\varphi\in G^2$ 及び $\eta > 0$ に対して，

$$\sup\{\,|\varphi(e_1,0) - \chi(e_1)| : e_1\in E_1\} < \eta$$

かつ

$$\sup\{\,|\varphi(0,e_2) - \chi(e_2)| : e_2\in E_2\} < \eta$$

を満たす $x = x_{\varphi,\eta} \in G$ が存在する．よって，各 $\varphi \in G^2$ に対して，

$$\sup\{ |\varphi(e_1,e_2) - x_\varphi(e_1+e_2)| : e_1 \in E_1,\ e_2 \in E_2\} < \eta(\varepsilon)$$

を満たす $x_\varphi \in G$ が取れる；こゝに，$\eta(\varepsilon)$ は補助定理で与えた定数である．そこで

$$g = \sum_\varphi \alpha_\varphi (x_\varphi | \hat{E}) \in A(\hat{E})$$

とおけば，

$$\|g\|_{A(\hat{E})} \leqq \sum_\varphi |\alpha_\varphi| < 1,$$

$$\begin{aligned} \|f - \dot{\lambda} g\|_{A(E)} &= \|F|E - \dot{\lambda} g\|_{A(E)} \qquad (E = E_1 \times E_2) \\ &\leqq \sum_\varphi |\alpha_\varphi|\, \|\varphi|E - \dot{\lambda} x_\varphi\|_{A(E)} \\ &\leqq \sum_\varphi |\alpha_\varphi|\, \varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

即ち次の事が示された：

$$(\forall f \in A(E) : \|f\| < 1)(\forall \varepsilon > 0)(\exists g \in A(\hat{E}) : \|g\| < 1) : \|f - \dot{\lambda} g\| < \varepsilon.$$

この事と $\hat{\lambda}$ が $\|\lambda\| \leqq 1$ なる1対1写像である事から，$\hat{\lambda}$ は等長写像である．以上により，定理4.2の証明は完全に終わる．（Q.E.D.）．

定理4.3．デスクリートでないすべての $\hat{G}$ は，

$$(*) \qquad A(E) \cong V(D_\infty) = \mathbf{C}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathbf{C}(D_\infty)$$

を満たすコンパクト集合Eを含む．

証明．デスクリートでない $\hat{G}$ を固定する．いま $\hat{G}$ のある閉部分群 Λ が $(*)$ を満たすコンパクト集合Eを含んだとする．このとき写像

$$r = q \circ p : A(\hat{G}) \xrightarrow{p} A(\Lambda) \xrightarrow{q} A_\Lambda(E) = A(\Lambda) / I_\Lambda(E)$$
$$(I_\Lambda(E) \subset A(\Lambda))$$

を次の様に定義する：

$$p(F) = F|\Lambda \qquad (F \in A(\hat{G}))$$
$$q(f) = f|E \qquad (f \in A(\Lambda)).$$

そうすると，p は定理1.2によって $A(\hat{G})$ を $A(\Lambda)$ の上に写像し，q も定義から $A(\Lambda)$ を $A_\Lambda(E)$ の上に写像する．そして容易に分かる様に，$\ker r = I_{\hat{G}}(E) \subset A(\hat{G})$ であるから，r は写像

$$A_{\hat{G}}(E) = A(\hat{G})/I_{\hat{G}}(E) \xrightarrow{1:1} A_{\Lambda}(E) = A(\Lambda)/I_{\Lambda}(E)$$

を生じ，これは"上へ"のノルム減少・準同型写像である．
$A_{\Lambda}(E)$は準単純だから，結局

$$A_{\hat{G}}(E) \cong A_{\Lambda}(E) \cong V(D_{\infty})$$

となり，定理の結論は$\hat{G}$に対しても成立する．だから，$\hat{G}$の適当な閉部分群 Λ が定理の結論を満たす事を示せばよい．

$\hat{G}$はデスクリートでないから，定理 1.1 の (c) により，距離付け可能な無限群Λ又は R をその閉部分群として含む．最初の場合，Λ は D_{∞} に同位相の集合 E^{*}を含むから，E^{*}を2つの交わらないコンパクト集合 E_1, E_2 に分割し $E = E_1 + E_2$ とおく．このとき，定理4.2より E は ㊄ を満たす．次に$\hat{G}$が R を閉部分群として含む場合は，まずトーラス T を考える．上の議論を T に適用して，T は $A_{T}(E) \cong V(D_{\infty})$ を満たすコンパクト集合 E を含む．E を適当な方法で，R の部分集合と同一視すれば，$A_{R}(E) \cong A_{T}(E)$ が成立する．よってこの場合の証明も終わる．(Q.E.D.)

Malliavin の定理の証明．以上の定理をもとにして，p-7 で述べた Malliavin の定理の証明を与える．$\hat{G}$ を任意

のデスクリートでない局所コンパクト・アーベル群とする．定理4.3から $\hat{G}$ は $A(E) \cong V(D_\infty)$ を満たすコンパクト集合Eを含む．一方 $D_\infty \times D_\infty$ は $V(D_\infty)$に対する非S-集合を含むから（p-14），Eも $A(E)$に対する非S-集合 E_1 を含む．よって $A(E)$ は $Z(I) = Z(J) = E_1$ となる2つの異なる閉イデアル I と J を含む．そこで $A(\hat{G})$ から $A(E)$ の上への自然な準同型写像を p として，$I_1 = p^{-1}(I)$，$J_1 = p^{-1}(J)$ とおけば，I_1 と J_1 は $A(\hat{G})$ の異なる閉イデアルであって，$Z(I_1) = Z(J_1) = E_1$．従って，E_1 は $A(\hat{G})$ に対する非S-集合である．（Q. E. D.）．

系．Kを，ある無限コンパクト群に同位相のコンパクト集合とすれば，$K \times K$ は テンソル代数 $V(K)$ に対する非S-集合を含む．

証明．Malliavin の定理と p-10 の定理 3.2 から明らか．

文 献 表

[1] H. Helson, On the ideal structure of group algebras.
Ark. Mat. 2, 83-86 (1952)

[2] C.S. Herz, Spectral synthesis for the Cantor set.
Proc. Nat. Acad. Sci. US. 42, 42-43 (1956).

[3] ——, Spectral synthesis for the circle.
Ann. Math. 68, 709-712 (1958).

[4] J.P. Kahane, Sur un théorème de Paul Malliavin.
C.R. Acad. Sci. Paris 248, 2943-2944 (1959).

[5] P. Malliavin, Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale dans une algèbre de fonctions presque periodiques.
C.R. Acad. Sci. Paris 248, 1756-1759 (1959).

[6] ——, Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite. Ibid. 2155-2157 (1959).

[7] ——, Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts.
Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Paris, 61-68 (1959).

[8] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Intersc. New York, 1962.

[9] S. Saeki, An elementary proof of a theorem of H. Helson.
Tôhoku Math. Jour., 20, 244-247 (1968)

[10] ——, On Kronecker sets homeomorphic to the unit interval.

To appear.

[11] L. Schwartz, Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes noncompacts.
C. R. Acad. Sci. Paris 227, 424-426 (1948).

[12] J. Tomiyama, Tensor products of commutative Banach algebras, Tôhoku Math. Jour., 12, 147-154 (1960).

[13] [14] N. Th. Varopoulos, Sur les ensembles parfaits et les séries trigonométriques, C. R. Acad. Sci. Paris, 260
4668-4670, 5165-5168 (1965)

[15] ———, Tensor algebras & Harmonic analysis.
Acta. Math., 119, 51-112 (1967).